به نام خدا

آزمایش سوم: تیر خمیده

مدرس: دکتر احسان فتحی

مدیر و موسس آموزشگاه آزاد فنی و حرفه‌ای فتحی

Telegram & Instagram: *@FathiTrainingGroup*

Website: *FathiTrainingGroup.com*

Email: *ehsanfathi_eh@yahoo.com*

Tel: *09386249330, 05191012910*

فهرست مطالب

- هدف آزمایش
- تئوری آزمایش
- وسایل انجام آزمایش
- دستگاه آزمایش
- روش انجام آزمایش
- جدول داده های آزمایش و مقادیر تئوری
- رسم منحنی های تجربی و تئوری
- خواسته‌های آزمایش
- روش گزارش‌کار نویسی

هدف آزمایش

- تعیین تغییر شکل تیرهای خمیده و مقایسه نتایج بدست آمده با مقادیر تئوری کاستیگلیانو

تئوری آزمایش

وقتی یک نیروی خارجی روی یک جسم ارتجاعی اثر می‌کند و در آن تغییر شکل ایجاد می‌کند، کار انجام شده توسط نیرو، در داخل جسم به صورت انرژی کرنشی ذخیره می‌شود. رابطه مربوط به انرژی ذخیره شده در اثر اعمال گشتاور خارجی به صورت زیر می‌باشد:

$$U = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx$$

قضیه دوم کاستیگلیانو (قضیه دوم انرژی):

بر طبق این قضیه برای یک جسم الاستیک خطی، تغییرمکان در هر نقطه برابر است با:

$$\delta_x = \frac{\partial U}{\partial P_x}$$

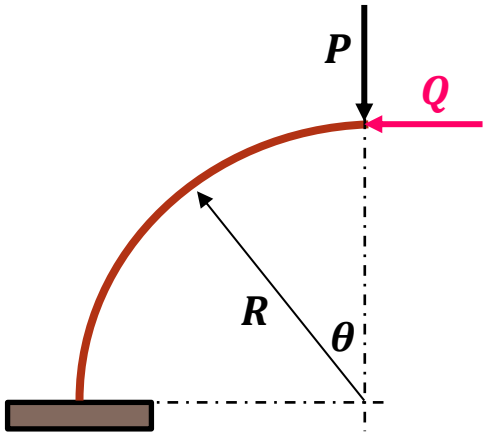
در این رابطه U انرژی کرنشی و P نیروی وارد در جهت تغییرمکان می باشد.

این تئوری در دومورد کاربرد دارد: ۱- تعیین تغییرمکان در محل بار، ۲- تعیین عکس العمل اضافی تیرهای نامعین

تئوری آزمایش

الف) ربع دایره:

ربع حلقه نازکی به شعاع R را که به صورت یکسردرگیر نصب شده است، در نظر بگیرید. نیروی قائم P در انتهای ربع حلقه اثر می‌کند و گشتاور خمشی M را در مقطعی تحت زاویه θ نسبت به افق ایجاد می‌نماید. برای تغییرمکان افقی یک Q فرضی در نظر می‌گیریم سپس آن را برابر صفر قرار می دهیم:



$$\delta_h = \frac{1}{EI}\int M.\frac{\partial M}{\partial Q}.ds$$

$$M = PRsin\theta + QR(1-cos\theta)$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = R(1-cos\theta)$$

$$Q = 0 \rightarrow M = PRsin\theta$$

$$ds = Rd\theta$$

$$\delta_h = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (PRsin\theta)R(1-cos\theta)\ Rd\theta = \frac{PR^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin\theta - sin\theta cos\theta)d\theta = \frac{PR^3}{2EI}$$

تئوری آزمایش

تغییرمکان عمودی:

$$\delta_v = \frac{1}{EI}\int M.\frac{\partial M}{\partial P}.ds$$

$$M = PRsin\theta + QR(1-cos\theta)$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = Rsin\theta$$

$$Q = 0 \rightarrow M = PRsin\theta$$

$$\delta_v = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (PRsin\theta)Rsin\theta\ Rd\theta = \frac{PR^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\theta d\theta$$

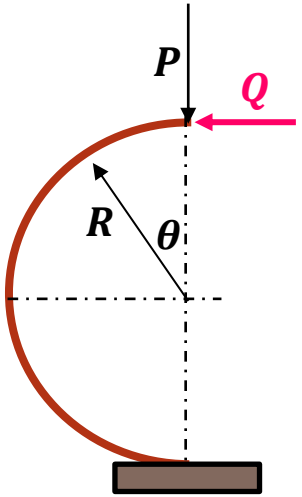
$$\delta_v = \frac{PR^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)d\theta = \frac{PR^3}{2EI}\left[\theta - \frac{1}{2}sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi PR^3}{4EI}$$

تئوری آزمایش

ب) نیم دایره:

نحوه محاسبه تغییرمکان افقی و قائم در نیم دایره مشابه ربع دایره می باشد. با این تفاوت که در نیم دایره کران انتگرال از 0 تا π تغییر پیدا می کند. نحوه محاسبه خیز افقی به صورت زیر است:

$$\delta_h = \frac{1}{EI}\int M.\frac{\partial M}{\partial Q}.ds$$



$$M = PRsin\theta + QR(1-cos\theta)$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = R(1-cos\theta)$$

$$Q = 0 \rightarrow M = PRsin\theta$$

$$ds = Rd\theta$$

$$\delta_h = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi}(PRsin\theta)R(1-cos\theta)\,Rd\theta = \frac{PR^3}{EI}\int_0^{\pi}(sin\theta - sin\theta cos\theta)d\theta = \frac{PR^3}{2EI}$$

تئوری آزمایش

تغییرمکان عمودی:

$$\delta_v = \frac{1}{EI}\int M.\frac{\partial M}{\partial P}.ds$$

$$M = PRsin\theta + QR(1-cos\theta)$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = Rsin\theta$$

$$Q = 0 \rightarrow M = PRsin\theta$$

$$\delta_v = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi}(PRsin\theta)Rsin\theta\ Rd\theta = \frac{PR^3}{EI}\int_0^{\pi} sin^2\theta d\theta$$

$$\delta_v = \frac{PR^3}{EI}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)d\theta = \frac{PR^3}{2EI}\left[\theta - \frac{1}{2}sin2\theta\right]_0^{\pi} = \frac{\pi PR^3}{2EI}$$

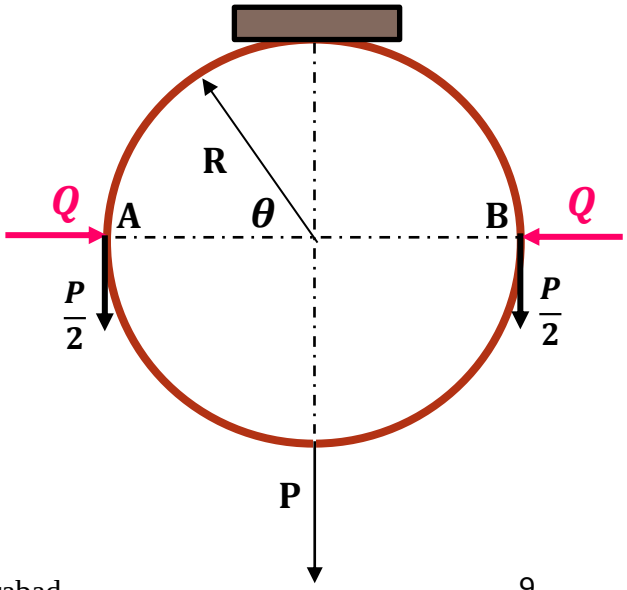
تئوری آزمایش

ج) دایره کامل:

برای محاسبه افزایش قطر یک حلقه نازک به شعاع R که تحت تأثیر دو نیروی مساوی و مختلف العلامت P قرار گرفته است، ابتدا حلقه را در امتداد قطر افقی AB قطع می‌کنیم. به علت تقارن بخش‌های فوقانی و تحتانی، مقطع دوران زاویه‌ای ندارد بر این اساس و با استفاده از قضیه کاستیگلیانو بدست می‌آوریم:

$$M = M_A - \frac{PR}{2}(1 - cos\theta)$$

$$\frac{\partial M}{M_A} = 1$$



تئوری آزمایش

که در این رابطه M_A ممان مجهول در مقطع افقی، P نیروی قائم و R شعاع حلقه است. با توجه به شرط صفر بودن زاویه چرخشی در A می توان نوشت:

$$\frac{\partial u}{\partial M_A} = 0 \rightarrow \theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M \frac{\partial M}{\partial M_A} R d\theta}{EI} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left[M_A - \frac{PR}{2}(1 - cos\theta)\right] R d\theta}{EI}$$

با حل رابطه فوق خواهیم داشت:

$$M_A = \frac{PR}{2}\left(\frac{\pi - 2}{\pi}\right)$$

در نتیجه لنگر خمشی در مقطع دلخواه θ با توجه به مقدار M_A برابر است با:

$$M = \frac{PR}{2}\left(\frac{\pi - 2}{\pi}\right) - \frac{PR}{2}(1 - cos\theta)$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = \frac{R}{2}\left(\frac{\pi - 2}{\pi}\right) - \frac{R}{2}(1 - cos\theta)$$

تئوری آزمایش

اکنون توزیع ممان در داخل حلقه معین است. با اعمال دوباره قضیه کاستیگلیانو داریم:

$$\delta_v = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} M\frac{\partial M}{\partial P}\frac{}{EI}Rd\theta = \frac{PR^3}{4\pi EI}(\pi^2 - 8) = 0.149\frac{PR^3}{EI}$$

در این رابطه δ_v افزایش قطر قائم حلقه، P نیروی کشش، R شعاع حلقه و EI سختی خمشی مقطع حلقه است. به طور مشابه به کمک زوج نیروی Q که به طور موقت و به شکل افقی در نقاط A و B اثر می‌کند، کاهش قطر افقی مطابق رابطه زیر به دست می‌آید.

$$M = -QRsin\theta + \frac{PR}{2}\left(\frac{\pi - 2}{\pi}\right) - \frac{PR}{2}(1 - cos\theta)$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = -Rsin\theta$$

$$\delta_h = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} M\frac{\partial M}{\partial Q}\frac{}{EI}Rd\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left[M_A - \frac{PR}{2}(1 - cos\theta)\right]Rsin\theta d\theta}{EI}d\theta = (\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2})\frac{PR^3}{EI}$$

وسایل انجام آزمایش

- یک پایه برای نصب تیرهای خمیده
- تعدادی ساعت اندازه‌گیری
- وزنه
- وزنه آویز
- تیر ربع دایره
- تیر نیم دایره
- تیر دایروی

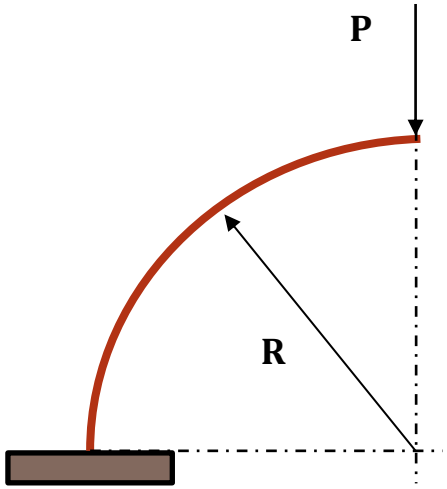
دستگاه آزمایش

شکل ۱: معرفی وسایل آزمایش

روش انجام آزمایش

۱- مرحله اول: خیز در تیر ربع دایره

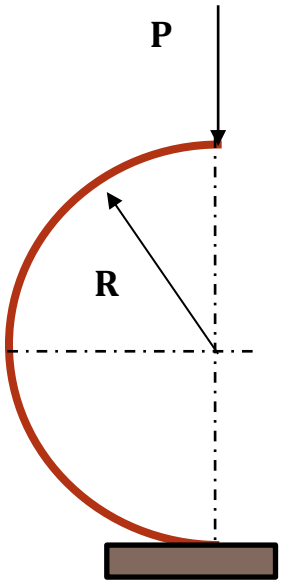
تیر ربع دایره را به صورت یکسر گیردار نصب کنید. سپس با وزنه‌های صد گرمی حداکثر تا ۵۰۰ گرم تیر را بارگذاری نموده و جدول مربوطه را تکمیل نمایید.



روش انجام آزمایش

۲- مرحله دوم: خیز در تیر نیم دایره

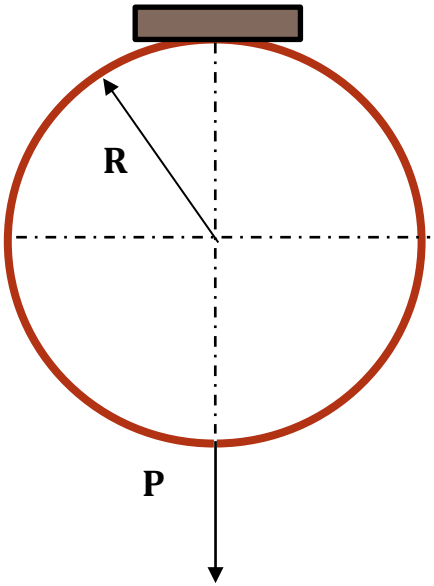
تیر نیم دایره را به صورت یکسر گیردار نصب کنید. سپس با وزنه‌های صد گرمی حداکثر تا ۵۰۰ گرم تیر را بارگذاری نموده و جدول مربوطه را تکمیل نمایید.



روش انجام آزمایش

۳- مرحله سوم: خیز در تیر دایره‌ای

تیر نیم دایره را به صورت یکسر گیردار نصب کنید. سپس با وزنه‌های صد گرمی حداکثر تا ۷۰۰ گرم تیر را بارگذاری نموده و جدول مربوطه را تکمیل نمایید.



محاسبه مقادیر تئوری

طبق آن چه در تئوری آزمایش بدست آورده شد، فرمول‌های لازم برای محاسبه مقادیر تئوری هر مرحله عبارتند از:

۱- مرحله اول:

خیز عمودی $\delta_v = \frac{\pi}{4}\frac{PR^3}{EI}$ **خیز افقی** $\delta_h = \frac{PR^3}{2EI}$

۲- مرحله دوم:

خیز عمودی $\delta_v = \frac{\pi}{2}\frac{PR^3}{EI}$ **خیز افقی** $\delta_h = 2\frac{PR^3}{EI}$

۳- مرحله سوم:

خیز عمودی $\delta_v = 0.149\frac{PR^3}{EI}$ **خیز افقی** $\delta_h = 0.137\frac{PR^3}{EI}$

محاسبه درصد خطای آزمایشگاهی

نحوه محاسبه درصد خطای آزمایشگاهی در زیر ارائه شده است:

$$\text{درصد خطای آزمایشگاهی} = \frac{\text{خیز تجربی} - \text{خیز تئوری}}{\text{خیز تئوری}} \times 100$$

جدول داده‌های آزمایش و نتایج تئوری

مرحله اول: ربع دایره

$$I = \frac{Bh^3}{12} \qquad \delta_h = \frac{1}{2}\frac{PR^3}{EI} \qquad \delta_v = \frac{\pi}{4}\frac{PR^3}{EI}$$

$$B = 23.30\ mm, \qquad h = 2.70\ mm, \qquad E = 207000\ MPa, \qquad R = 150\ mm$$

بار (gr)	خیز افقی تجربی (mm)	خیز افقی تئوری (mm)	درصد خطا (%)	خیز عمودی تجربی (mm)	خیز عمودی تئوری (mm)	درصد خطا (%)
۱۰۰	۰/۲۱۵	۰/۲۰۹		۰/۳۳۴	۰/۳۲۸	
۲۰۰	۰/۴۳۱	۰/۴۱۸		۰/۶۶۸	۰/۶۵۷	
۳۰۰	۰/۶۴۷	۰/۶۲۷		۱/۰۰۳	۰/۹۸۶	
۴۰۰	۰/۸۶۳	۰/۸۳۶		۱/۳۳۷	۱/۳۱۴	
۵۰۰	۱/۰۷۹	۱/۰۴۶		۱/۶۷۱	۱/۶۴۳	

جدول داده‌های آزمایش و نتایج تئوری

مرحله دوم: نیم دایره

$$I = \frac{Bh^3}{12} \qquad \delta_h = 2\frac{PR^3}{EI} \qquad \delta_v = \frac{\pi}{2}\frac{PR^3}{EI}$$

$$B = 20.20\,mm, \qquad h = 2.56\,mm, \qquad E = 207000\,MPa, \qquad R = 115\,mm$$

بار (gr)	خیز افقی تجربی (mm)	خیر افقی تئوری (mm)	درصد خطا (%)	خیر عمودی تجربی (mm)	خیز عمودی تئوری (mm)	درصد خطا (%)
۱۰۰	۰/۵۳۱	۰/۵۱۰		۰/۴۱۳	۰/۴۰۰	
۲۰۰	۱/۰۶۴	۱/۰۲۰		۰/۸۲۶	۰/۸۰۱	
۳۰۰	۱/۵۹۶	۱/۵۳۱		۱/۲۴۰	۱/۲۰۱	
۴۰۰	۲/۱۲۷	۲/۰۴۱		۱/۶۵۳	۱/۶۰۲	
۵۰۰	۲/۶۵۹	۲/۵۵۲		۲/۰۶۶	۲/۰۰۳	

جدول داده‌های آزمایش و نتایج تئوری

مرحله سوم: دایره کامل

$$I = \frac{Bh^3}{12} \qquad \delta_h = 0.137\frac{PR^3}{EI} \qquad \delta_v = 0.149\frac{PR^3}{EI}$$

$$B = 23.00\,mm, \qquad h = 2.56\,mm, \qquad E = 207000\,MPa, \qquad R = 133\,mm$$

بار (gr)	خیز افقی تجربی (mm)		خیر افقی تئوری (mm)	درصد خطا (%)	خیر عمودی تجربی (mm)	خیز عمودی تئوری (mm)	درصد خطا (%)
۱۰۰	۰/۰۲۴	۰/۰۲۴	۰/۰۴۷		۰/۰۵۲	۰/۰۵۱	
۲۰۰	۰/۰۴۸	۰/۰۴۸	۰/۰۹۴		۰/۱۰۵	۰/۱۰۳	
۳۰۰	۰/۰۷۲	۰/۰۷۲	۰/۱۴۲		۰/۱۵۷	۰/۱۵۴	
۴۰۰	۰/۰۹۶	۰/۰۹۶	۰/۱۸۹		۰/۲۱۰	۰/۲۰۶	
۵۰۰	۰/۱۲۱	۰/۱۲۱	۰/۲۳۷		۰/۲۶۲	۰/۲۵۸	

خواسته های آزمایش

- **پس از انجام آزمایش فوق مطلوب است:**

۱- تکمیل جداول داده‌های آزمایش و نتایج تئوری

۲- ترسیم منحنی خیز در مقابل بار در هر مرحله

۳- محاسبه درصد خطا در هر مرحله

۴- بررسی عوامل خطا

۵- ارائه پیشنهاداتی برای کاهش خطا

روش گزارش کار نویسی

- **گزارش کار باید شامل بخش های زیر باشد:**

۱- صفحه اول: عنوان آزمایش، شماره آزمایش، تاریخ انجام آزمایش

۲- صفحه دوم: فهرست مطالب

۳- سایر صفحات: اهداف آزمایش، تئوری آزمایش، وسایل انجام آزمایش، روش انجام آزمایش، ثبت نتایج، ترسیم منحنی‌های خواسته شده، محاسبه درصد خطا، بررسی عوامل خطا، نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات

گروه آموزشی فتحی

آلبرت انیشتن:

اگر می خواهید خوشبخت باشید، زندگی را به یک هدف گره بزنید

نه به آدم ها و اشیاء...